

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a V-a
27.02.2015

Subiectul I.(20 puncte)

Un număr de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 3 și restul 26, iar diferența dintre cifra sutelor și cea a unităților numărului este egală cu 4. Să se determine numărul.

prof. Ioan Balica, Școala Gimnazială "Ioan Bob" Cluj-Napoca

Subiectul II.(25 puncte)

Numerele naturale a, b, c verifică egalitățile: $a+b+c=31$ și $2a+3b+4c=105$.

a) Aflați ultima cifră a produsului $(b+2c) \cdot (c-a) \cdot (2a+b)$.

b) Verificați dacă $(2ac+bc):19$.

prof. Marieta Hristea, Liceul de Informatică "Tiberiu Popoviciu" Cluj-Napoca

Subiectul III.(25 puncte)

Gigel are banii adunați aranjați în plicuri: în primul plic are 2 lei, în al doilea plic are 13 lei, în al treilea plic are 24 lei, în plicul cu numărul 4 are 35 lei, în plicul cu numărul 5 are 46 lei, și așa mai departe.

a) Aflați ce sumă are Gigel în plicul cu numărul 49;

b) Stabiliți dacă există vreun plic în care să fie 2015 lei;

c) Gigel își dorește o consolă PlayStation 4 care costă 1799 lei. Câți lei primește rest Gigel dacă plătește cu banii din primele 20 plicuri?

prof. Cristian Petru Pop, ISJ Cluj

Subiectul IV.(20 puncte)

a) Să se calculeze $48^2 - 17^2$;

b) Să se arate că 2015^{2015} se poate scrie ca diferență de două pătrate.

prof. Vasile Șerdean, Școala Gimnazială nr.1 Gherla

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 2 ore.

SUCCES!

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a VI-a
27.02.2015

Subiectul I.(15 puncte)

Să se arate că pentru orice n număr natural nenul, $9^n + 63$ se divide cu 72.

prof. Vasile Șerdean, Școala Gimnazială nr.1 Gherla

Subiectul II.(30 puncte)

Se consideră punctele A, O, D , astfel încât $O \in (AD)$ și unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC$, astfel încât punctele B, C să fie situate de aceeași parte a dreptei AD . Dacă măsura $\sphericalangle AOB$ este jumătate din măsura $\sphericalangle COD$, iar măsura $\sphericalangle COD$ este medie aritmetică a măsurilor unghiurilor $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, iar (OM) este bisectoarea $\sphericalangle AOC$ și $N \in \text{Int}(\sphericalangle COD)$ astfel încât $\sphericalangle MON$ este unghi drept, arătați că:

- a) $\sphericalangle BOC$ este unghi drept;
- b) $\sphericalangle BOM$ și $\sphericalangle NOD$ sunt congruente.

prof. Florica-Daniela Bodea, Liceul Teoretic Gelu Voievod Gilău

Subiectul III.(20 puncte)

Raluca a primit de ziua ei o sumă de bani egală cu media aritmetică a numerelor naturale de trei cifre care prin împărțire la 5 dau restul 2, prin împărțire la 7 dau restul 5 și prin împărțire la 8 dau restul 1. De ce sumă mai are nevoie Raluca pentru a putea să-și cumpere o consolă PlayStation 4 care costă 1799 lei?

prof. Cristian Petru Pop, ISJ Cluj

Subiectul IV.(25 puncte)

Fie : $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_k$, puncte coliniare, astfel încât $P_1P_2 = 4\text{mm}$, $P_2P_3 = 8\text{mm}$, $P_4P_5 = 16\text{mm}$, $P_3P_5 = 28\text{mm}$,

- a) Să se arate că punctul P_3 este mijlocul lui $[P_1P_4]$.
- b) Să se determine numărul natural k , pentru care $P_5P_k = 18200$.

prof. Romulus Zanc, Școala Gimnazială Căianu

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Țimp efectiv de lucru - 2 ore.

SUCCES!

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a VII-a
27.02.2015

Subiectul I.(20 puncte)

Se consideră numărul $a = \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că:
 $\frac{1}{4} < a \leq \frac{1}{3}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

prof. Nicolae Alb, Liceul Teoretic „Octavian Goga” Huedin

Subiectul II.(30 puncte)

În triunghiul $\triangle ABC$, bisectoarea $[AE]$, $E \in (BC)$ intersectează mediana $[BF]$, $F \in (AC)$, în punctul G .

- a) Să se determine $a \in \mathbb{N}$, astfel încât $\frac{BG}{GF} \cdot \frac{CE}{BE} = 2^a$.
- b) Dacă triunghiurile $\triangle AGF$ și $\triangle BGE$ sunt echivalente, atunci G este centrul de greutate al $\triangle ABC$.

prof. Elena Măgdaș, Școala Gimnazială Horea Cluj-Napoca

Subiectul III.(20 puncte)

În trapezul $ABCD$, $AB \parallel CD$, $BC=12\text{cm}$. Bisectoarele unghiurilor B și C se întâlnesc în E pe (AD) . Dacă segmentul care unește mijloacele diagonalelor trapezului are lungimea 4 cm , arătați că $AC < 22\text{ cm}$.

prof. Vasile Șerdean, Școala Gimnazială nr. 1 Gherla

Subiectul IV.(20 puncte)

Să se arate că pentru orice număr natural n diferit de zero, 35^n se poate scrie ca diferență de două pătrate.

prof. Vasile Șerdean, Școala Gimnazială nr. 1 Gherla

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN CLUJ
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
CLASA a VIII-a
27.02.2015

Subiectul I.(30 puncte)

- a) Dacă a, b, c sunt numere reale nenule, care verifică relațiile $a + b + c = 9$ și $ab + bc + ac = 27$, să se arate că numărul $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ este natural.

prof. Vasile Șerdean , Școala Gimnazială nr. 1 Gherla

- b) Fie $S = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Calculați S dacă $n = 100$.
2. Determinați $n \in \mathbb{N}$, dacă $S = 89700$.

prof. Grigore Tarța, Liceul Teoretic „Ana Ipătescu” Gherla

Subiectul II.(20 puncte)

Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât $AD \perp BC$ și $m(\angle ADB) = m(\angle ADC)$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.

prof. Elena Măgdaș, Școala Gimnazială Horea Cluj-Napoca

Subiectul III.(20 puncte)

Fie ABCD un pătrat și $AM \perp (A, B, C)$. Punctele E și F aparțin segmentelor (AD) și respectiv (BC) astfel încât $AE = ED$ și $BF = 2FC$. Dreapta EF intersectează prelungirea laturii CD în punctul G. Arătați că dacă distanța de la D la MG este egală cu distanța de la A la MG, atunci $AM = 3 \cdot AB$.

prof. Radu Poenaru, Transylvania College Cluj-Napoca

Subiectul IV.(20 puncte)

Se consideră numărul $a = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

- a) Să se arate că a este număr întreg par, pentru orice x și y din \mathbb{Z} .
- b) Să se determine perechile de numere întregi x și y astfel încât a să fie număr prim.

prof. Alb Nicolae, Liceul Teoretic „Octavian Goga” Huedin

Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!

Barem clasa a V-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (20 puncte)

$$\overline{abc} : \overline{cba} = 3, \text{rest } 26 \Rightarrow \overline{abc} = 3\overline{cba} + 26 \Rightarrow 97a = 20b + 299c + 26 \quad (10 \text{ p})$$

$$\text{Dar } a - c = 4 \Rightarrow a = c + 4$$

$$\text{Deci } 97c + 388 = 299c + 20b + 26 \Rightarrow 202c + 20b = 362 \quad (5 \text{ p})$$

$$\text{Se obține } c = 1, b = 8 \text{ și } a = 5 \Rightarrow \overline{abc} = 581 \quad (5 \text{ p})$$

Subiectul II. (25 puncte)

a) $2a + 3b + 4c = 105 \quad (1)$

$$a + b + c = 31 \mid \cdot 2 \Rightarrow 2a + 2b + 2c = 62 \quad (2)$$

$$\text{Scăzând din relația (1) relația (2) se obține: } b + 2c = 43 \quad (5 \text{ p})$$

$$2a + 3b + 4c = 105 \quad (1)$$

$$a + b + c = 31 \mid \cdot 3 \Rightarrow 3a + 3b + 3c = 93 \quad (3)$$

$$\text{Scăzând din relația (1) relația (3) se obține: } c - a = 12 \quad (5 \text{ p})$$

$$2a + 3b + 4c = 105 \Rightarrow 2a + b + 2b + 4c = 105 \Rightarrow 2a + b + 2 \cdot (b + 2c) = 105 \Rightarrow 2a + b + 2 \cdot 43 = 105$$

$$2a + b = 105 - 86 \Rightarrow 2a + b = 19 \quad (5 \text{ p})$$

$$\underline{U43((b+2c) \cdot (c-a) \cdot (2a+b))} = u(43 \cdot 12 \cdot 19) = 4. \quad (5 \text{ p})$$

$$\text{b) } (2 \cdot a \cdot c + b \cdot c) : 19 \Leftrightarrow c \cdot (2a + b) : 19 \Leftrightarrow c \cdot 19 : 19 \text{ „A”}. \quad (5 \text{ p})$$

Subiectul III. (25 puncte)

Observăm că în plicul cu numărul n , Gigel are $11(n-1)+2$ lei; (5 p)

a) 530 lei; (5 p)

b) $11(n-1)+2=2015$, deci $n=184$; (5 p)

c) $S_{20} = 11(1+2+3+\dots+19)+2 \cdot 20 = 2130$ (5 p)

Gigel primește rest 331 lei. (5 p)

Subiectul IV. (20 puncte)

a) $48^2 - 17^2 = 2304 - 289 = 2015$ (10 p)

b) $2015^{2015} = 2015^{2014} \cdot 2015 = 2015^{2014} (48^2 - 17^2) = (2015^{1007} \cdot 48)^2 - (2015^{1007} \cdot 17)^2$ (10 p)

Barem clasa a VI-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (15 puncte)

Vom arăta că $9^n + 63$ se divide cu numerele prime între ele 8 și 9. (5 p)

Divizibilitatea cu 9 este evidentă.

$$9^n + 63 = (8+1)^n + (64-1) = (M_8 + 1) + (M_8 - 1) = M_8 : 8 \quad (10 \text{ p})$$

Subiectul II. (30 puncte)

a) Din enunț obținem $m(\sphericalangle COD) = 2m(\sphericalangle AOB)$; $2m(\sphericalangle COD) = m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC)$, deci

$$4m(\sphericalangle AOB) = m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) \text{ și avem } m(\sphericalangle BOC) = 3m(\sphericalangle AOB). \quad (10 \text{ p})$$

Cum $\sphericalangle AOD$ este alungit: $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) = 180^\circ \Rightarrow 6m(\sphericalangle AOB) = 180^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AOB) = 30^\circ$

$$\Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ \Rightarrow \sphericalangle BOC \text{ este unghi drept} \quad (5 \text{ p})$$

b) $m(\sphericalangle AOC) = m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) = 120^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle COM) = 60^\circ$

$$m(\sphericalangle BOM) = m(\sphericalangle BOC) - m(\sphericalangle COM) = 30^\circ \quad (10 \text{ p})$$

Cum $m(\sphericalangle MON) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle NOC) = 30^\circ$, iar din $m(\sphericalangle COD) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle NOD) = 30^\circ$,

deci $\sphericalangle BOM$ și $\sphericalangle NOD$ sunt congruente. (5 p)

Subiectul III. (20 puncte)

Fie x suma de bani pe care o are Raluca.

$$\left. \begin{array}{l} x = 5c_1 + 2 \\ x = 7c_2 + 5 \\ x = 8c_3 + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 23 = 5(c_1 + 5) \\ x + 23 = 7(c_2 + 4) \\ x + 23 = 8(c_3 + 3) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 / (x + 23) \\ 7 / (x + 23) \\ 8 / (x + 23) \end{array} \right. \quad (10 \text{ p})$$

$\Rightarrow (x + 23)$ poate fi c.m.m.m.c al numerelor 5, 7, 8 sau multipli săi

$$\Rightarrow (x + 23) \in \{280, 560, 840\} \Rightarrow x \in \{257, 537, 817\} \Rightarrow M_a = 537 \quad (5 \text{ p})$$

Raluca mai are nevoie de 1262 lei (5 p)

Subiectul IV. (25 puncte)

a) $P_3P_4 = 12\text{cm}$, $P_1P_3 = 12\text{cm}$, deci P_3 este mijlocul segmentului P_1P_4 (15 p)

b) Sciirea relației $P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \dots + P_{k-1}P_k = 18240$ sub forma :

$$4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + \dots + 4 \cdot (k-1) = 18240 \Leftrightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (k-1) = 4560 \quad (5 \text{ p})$$

$$(k-1)k = 9120 \text{ deci } k = 96. \quad (5 \text{ p})$$

Barem clasa a VII-a
(OLM 2015-etapa locală)

Of. 10 p

Subiectul I. (20 puncte)

$$a = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots - \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n(2n+1)} \right) =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{n(2n+1)+1}{n(2n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2n^2+n+1}{2n^2+n} \quad (10 \text{ p})$$

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{4} \cdot \frac{2n^2+n+1}{2n^2+n} \Leftrightarrow 2n^2 + n < 2n^2 + n + 1 \quad "A" \quad (5 \text{ p})$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2n^2 + n + 1}{2n^2 + n} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 6n^2 + 3n + 3 \leq 8n^2 + 4n \Leftrightarrow 2n^2 + n \geq 3 \Leftrightarrow n(2n + 1) \geq 3 \quad "A" \quad (5 \text{ p})$$

Subiectul II. (30 puncte)

Desen corect

(5 p)

a) $[AE \text{ bisectoare}] \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \quad (5 \text{ p})$

$$[AG \text{ bisectoare}] \Rightarrow \frac{BG}{GF} = \frac{AB}{AF} \Rightarrow \frac{BG}{GF} = \frac{AB}{\frac{AC}{2}} \Rightarrow \frac{BG}{GF} = \frac{2AB}{AC} \quad ; \quad \frac{BG}{GF} \cdot \frac{CE}{BE} = \frac{2AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 2 \Rightarrow a = 1. \quad (5 \text{ p})$$

b) $A_{\triangle BEG} = A_{\triangle BEA} - A_{\triangle BGA}$

$$A_{\triangle AGF} = A_{\triangle BFA} - A_{\triangle BGA} \Rightarrow A_{\triangle BEA} = A_{\triangle AFB} \Rightarrow \frac{BA \cdot EM}{2} = \frac{BA \cdot FN}{2} \Rightarrow EM = FN \quad (10 \text{ p})$$

$EM \perp AB, FN \perp AB \Rightarrow EM \parallel FN \Rightarrow EF \parallel AB, F$ mijlocul segmentului $AC \Rightarrow E$ mijlocul segmentului $BC \Rightarrow G$ centrul de greutate al $\triangle ABC$. (5 p)

Subiectul III. (20 puncte)

Desen corect

(5 p)

$$[CE, [BE \text{ sunt bisectoare}] \Rightarrow m(\angle ECB) + m(\angle EBC) = 180^\circ : 2 = 90^\circ \Rightarrow m(\angle CEB) = 90^\circ \quad (5 \text{ p})$$

$$F \text{ este mijlocul lui } (BC) \Rightarrow FE = \frac{BC}{2} = 6 = FB = FC \Rightarrow \triangle EFB \text{ isoscel}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle FEB \equiv \angle FBE \\ \text{dar } \angle ABE \equiv \angle FBE \end{array} \right\} \Rightarrow \angle FEB \equiv \angle ABE \Rightarrow EF \parallel AB \quad (5 \text{ p})$$

Deci EF este linie mijlocie $AB + CD = 12$, dar $AB - CD = 8$, deci $AB = 10$

În $\triangle ABC, AC < AB + BC = 22 \text{ cm}$ (5 p)

Subiectul IV. (20 puncte)

Dacă n este impar, $n = 2k + 1$, atunci $35^{2k+1} = 35^{2k} \cdot 35 = 35^{2k} (36 - 1) = (35^k \cdot 6)^2 - (35^k)^2 \quad (10 \text{ p})$

Dacă n este par, $n = 2k$, atunci $35^{2k} = 35^{2k-2} \cdot 35^2 = 35^{2k-2} \cdot 1225 = 35^{2k-2} \cdot (37^2 - 12^2) = (35^{k-1} \cdot 37)^2 - (35^{k-1} \cdot 12)^2 \quad (10 \text{ p})$

Subiectul I. (30 puncte)

a) Din $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 27$ (5 p)

Cum $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab+bc+ac) = 2 \cdot 27 - 2 \cdot 27 = 0$ (5 p)

Deci $a-b=b-c=c-a \Rightarrow a=b=c$

Din $a+b+c=9$ și $a=b=c \Rightarrow a=b=c=3 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1 \in \mathbb{N}$ (5 p)

b) Pornind de la egalitatea : $(n-1) \cdot n \cdot (n+1) = n^3 - n$, suma S devine :

$$S = 2^3 - 2 + 3^3 - 3 + 4^3 - 4 + \dots + n^3 - n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) =$$

$$= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n+2)}{2} \Rightarrow S = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{4}. \quad (5 p)$$

a). Dacă $n = 100$, avem $S = \frac{99 \cdot 100 \cdot 101 \cdot 102}{4} = \frac{(100-1) \cdot (100+1) \cdot 10200}{4} = 9999 \cdot 2550 = 25497450$ (5 p)

b). Dacă $S = 89700 \Rightarrow \frac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{4} = 89700 \Rightarrow (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 4 \cdot 89700 =$
 $= 2^2 \cdot 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 23 = 23 \cdot (2^3 \cdot 3) \cdot 5^2 \cdot (2 \cdot 13) = 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \Rightarrow n = 24.$ (5 p)

Subiectul II. (20 puncte)

Desen corect (5 p)

Trasăm $AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp BC, BC \perp AD \Rightarrow BC \perp (DAO) \Rightarrow BC \perp DO$ (1)

$T3 \perp \Rightarrow AE \perp BD$ și $AF \perp DC$ (5 p)

Din congruența triunghiurilor AED și $AFD \Rightarrow [ED] \equiv [DF]$

Din congruența triunghiurilor DOE și $DOF \Rightarrow m(\angle ODE) = m(\angle ODF) \Rightarrow [DO \text{ bisectoare}]$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow \triangle BCD$ isoscel $\Rightarrow BD = DC$ (5 p)

Din congruența triunghiurilor ABD și $ACD \Rightarrow [AB] \equiv [AC] \Rightarrow \triangle ABC$ isoscel. (5 p)

Subiectul III. (20 puncte)

Notăm cu AA' , respectiv DD' cele două perpendiculare din D și respectiv A pe dreapta MG .

Atunci $AA' = DD' \Rightarrow \frac{AA' \cdot MG}{2} = \frac{DD' \cdot MG}{2} \Rightarrow A_{AMG} = A_{DMG}$. (3 p)

Justificăm faptul că triunghiurile MDG și MAG sunt dreptunghice. (2 p)

Atunci $A_{AMG} = A_{DMG} \Rightarrow \frac{MD \cdot DG}{2} = \frac{MA \cdot AG}{2} \Rightarrow MD \cdot DG = MA \cdot AG$ (5 p)

Notăm $AM = x$ și $AD = a$.

Folosim TFA în triunghiul $EDG \Rightarrow \frac{CG}{GD} = \frac{FC}{ED} \Rightarrow \frac{CG}{GD} = \frac{a}{3} : \frac{a}{2} \Rightarrow CG = 2CD \Rightarrow CG = 2a$ (2 p)

Folosim Teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic $ADG \Rightarrow AG = a\sqrt{10}$. (2 p)

Folosim Teorema lui Pitagora în triunghiul $MAD \Rightarrow MD = \sqrt{a^2 + x^2}$ (2 p)

Deoarece $A_{AMG} = A_{DMG} \Rightarrow MA \cdot AG = MD \cdot GD \Rightarrow x \cdot a\sqrt{10} = 3a \cdot \sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow$

$x \cdot \sqrt{10} = 3\sqrt{a^2 + x^2} \Rightarrow x^2 \cdot 10 = 9(a^2 + x^2) \Rightarrow x^2 = 9a^2 \Rightarrow x = 3a$ (4 p)

Subiectul IV. (20 puncte)

a) $a = \left(x + \frac{3}{2} + y - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{3}{2} - y + \frac{1}{2}\right) = (x+y+1)(x-y+2) = x^2 - y^2 + 2(x+y) + x - y + 2 = x^2 + x - y^2 + y + 2x + 2 = x(x+1) - y(y-1) + 2(x+1)$

= nr. întreg par, deoarece fiecare din cei trei termeni sunt numere pare. (10 p)

b) $a = (x+y+1)(x-y+2)$. Din 1) rezulta ca a este nr. par, de unde a este prim dacă și numai dacă $a = 2$.

Avem următoarele cazuri:

$x+y+1 = 1$ și $x-y+2 = 2 \Leftrightarrow x=0, y=0$; $x+y+1 = -1$ și $x-y+2 = -2 \Leftrightarrow x=-3, y=1$;

$x+y+1 = 2$ și $x-y+2 = 1 \Leftrightarrow x=0, y=1$; $x+y+1 = -2$ și $x-y+2 = -1 \Leftrightarrow x=-3, y=0$;

Astfel: $S = \{(-3,0); (-3,1); (0,0); (0,1)\}$. (10 p)